MA720/MM720 – Análise no $\mathbb{R}^n$, 1s2014
1a. prova, 03/04/2014
Aluno: ____ RA: ____________
Assinatura como no RG: __________________________________

Questão 1. a) (0,5 pontos) Defina função contínua.

b) (2,0) Usando a sua definição, mostre que continuidade é uma propriedade local, i.e. uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua se e somente se para todo $a \in X$ existe um aberto $A \ni a$ em X tal que $f|A$ é contínua.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com $f(0,0) = 0$, $Df(0,0) = [0\ 1]$ e *matriz hessiana*

$$D^2 f(0,0) \equiv \begin{bmatrix} \partial_1^2 f(0,0) & \partial_1\partial_2 f(0,0) \\ \partial_2\partial_1 f(0,0) & \partial_2^2 f(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $G(x,y,z) = f(x+y+z, x+y-z)$.

a) (1,0) Mostre que a equação $G(x,y,z) = 0$ tem uma única solução $z = g(x,y)$ para todo (x,y) numa vizinhança da origem $(0,0)$ com g sendo uma função de classe C^2 nessa vizinhança.

b) (1,5) Calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)$.

3. a) (0,5) Enuncie o Teorema da Aplicação Inversa (TAI).

- -

b) (2,0) Só para Graduação: usando o TAI demonstre o Teorema da Aplicação Implícita **ou (exclusivo)**:

- -

b) (2,0) Usando o TAI demonstre a Forma Local das Submersões.

- -

4. (0,5) Só para Graduação: Demonstre o Teorema da Aplicação Inversa usando o Teorema da Aplicação Implícita **ou (exclusivo)**:

- -

4. (2,5) Sejam A um aberto do $\mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão de classe C^k, $k \geq 1$. Mostre que todo ponto $f(a), a \in A$, é centro de uma bola aberta B em $\mathbb{R}^{m+n}$ tal que f é um homeoformismo (uma bijeção contínua com inversa contínua) entre $V := f^{-1}(B \cap f(A))$ e $B \cap f(A)$ e que f^{-1}, definida em $B \cap f(A)$, é restrição de uma aplicação $g : B \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k.

CORREÇÃO: Sejam A um aberto do $\mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão de classe C^k, $k \geq 1$. Mostre que para todo ponto $a \in A$ existe um aberto $U \subset A$ contendo a tal que $f|U : U \to f(U)$ é um homeoformismo e $(f|U)^{-1}$ é a restrição de uma aplicação de classe C^k definida num aberto em $\mathbb{R}^{m+n}$.

1. **a)** Uma possibilidade: Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em um ponto a do seu domínio X se para todo aberto $V \ni f(a)$ (em $\mathbb{R}^n$) existe um aberto $U \ni a$ em X tal que $f(U) \subset V$, **0,3 pontos até aqui**
e é contínua, se for contínua em todos os pontos do seu domínio. $+\ \mathbf{0,2}$

Outra possibilidade: a imagem inversa de um aberto qualquer (no contra-domínio) é um aberto no domínio. **0,5**

b) *Exercício da Lista - Munkres, Ex.5, C.1,§3.*

($\Rightarrow$:) Tome $A = X$. **0,5**

($\Leftarrow$:) Sejam $a \in X$ e V um aberto contendo $f(a)$. Pela hipótese, existe um aberto $A \ni a$ em X tal que $f|A$ é contínua. Daí e da definição acima, existe um aberto U em A tal que $f(U) \subset V$. **0,5**
Mas, pela definição de abertos relativos, temos $U = B \cap A$ e $A = C \cap X$, para abertos B e C em $\mathbb{R}^m$, donde, $U = (B \cap C) \cap X$ é um aberto em X, pois $B \cap C$ é um aberto em $\mathbb{R}^m$ (interseção finita de abertos é um aberto). **0,5**
Portanto, f é contínua em a, pois $f(U) \subset V$ e V é qualquer aberto contendo $f(a)$. Como $a \in X$ é arbitrŕio, segue-se que f é contínua. **0,5**

2. *Cf. exercício da Lista - Munkres, Ex. 4, C.2,§9.*

a) Seja $H(x, y, z) = (x + y + z,\ x + y - z)$. Temos $G = f \circ H$, uma composição de funções de classe C^2, logo, pela Regra da Cadeia, vem que

$$DG = (Df \circ H)DH = [(\partial_1 f) \circ H \quad (\partial_2 f) \circ H] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{0,3}$$

$$DG(0,0,0) = \ [0 \ \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [\,1 \quad 1 \quad -1\,]. \qquad \mathbf{0,2}$$

Então $\partial G/\partial z(0,0,0) = -1 \neq 0$. **0,2**
Além disso, $G(0,0,0) = f(0,0) = 0$. **0,1**

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, obtemos o resultado que foi pedido. **0,2**

b) Pelo item **a)**, $G(x, y, g(x, y)) = 0$, para (x, y) numa vizinhança da origem. Daí, pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\,[G(x, y, g(x, y))] = G_x(x, y, g(x, y)) + G_z(x, y, g(x, y))g_x(x, y) = 0; \quad (1)$$

0,5

$$\begin{aligned} & \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\,[G(x, y, g(x, y))] \\ = \; & \tfrac{\partial}{\partial x}\,[G_x(x, y, g(x, y)) + G_z(x, y, g(x, y))g_x(x, y)] \\ = \; & G_{xx}(x, y, g(x, y)) + G_{zx}(x, y, g(x, y))g_x(x, y) \qquad (2) \\ & + [G_{xz}(x, y, g(x, y)) + G_{zz}(x, y, g(x, y))g_x(x, y)]g_x(x, y) \\ & + G_z(x, y, g(x, y))g_{xx}(x, y) = 0. \end{aligned}$$

0,5

De (1) e do item **a)**,

$G_x(0, 0, g(0, 0)) + G_z(0, 0, g(0, 0))g_x(0, 0) = 0$, $1 - g_x(0, 0) = 0$, $\boxed{g_x(0, 0) = 1}$.

0,2

Do item **a)** também obtemos

$$\begin{aligned} & [G_x \;\; G_y \;\; G_z] \equiv DG = [\,(\partial_1 f)\circ H \quad (\partial_2 f)\circ H\,] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ = \; & [(\partial_1 f)\circ H + (\partial_2 f)\circ H \quad (\partial_1 f)\circ H + (\partial_2 f)\circ H \quad (\partial_1 f)\circ H - (\partial_2 f)\circ H], \end{aligned}$$

donde vem que

$G_{xx} = [(\partial_1 f)\circ H + (\partial_2 f)\circ H]_x = \partial_1^2 f + 2\partial_2\partial_1 f + \partial_2^2 f$, $G_{xx}(0, 0, 0) = 1+0+1$,

$\boxed{G_{xx}(0, 0, 0) = 2}$;

$G_{zx} = G_{xz} = [(\partial_1 f)\circ H - (\partial_2 f)\circ H]_x = \partial_1^2 f + \partial_2\partial_1 f - \partial_1\partial_2 f - \partial_2^2 f$, $G_{xz}(0, 0, 0) = 1-1$,

$\boxed{G_{xz}(0, 0, 0) = 0}$;

$G_{zz} = [(\partial_1 f)\circ H - (\partial_2 f)\circ H]_z = \partial_1^2 f - \partial_2\partial_1 f - \partial_1\partial_2 f + \partial_2^2 f$, $G_{zz}(0, 0, 0) = 1+1$,

$\boxed{G_{zz}(0, 0, 0) = 2}$. **0,2**

Portanto, levando os valores acima em (2) para $x = 0, y = 0, z = 0$, concluímos:

$$2 + 0 + [0 + 2] - g_{xx}(0, 0) = 0, \quad \boxed{g_{xx}(0, 0) = 4}.$$

0,1

3. *Questão "teórica" (teoremas demonstrados em aula; v. livros-textos.)*

Enunciado parcialmente correto: **0,25**

Demonstração parcialmente correta: **1,0**

4. Só para Graduação: *Demonstre o Teorema da Aplicação Inversa usando o Teorema da Aplicação Implícita.*

Dada $f : A \to \mathbb{R}^n$, uma aplicação de classe C^k, definida no aberto A do $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$, com $Df(a)$ invertível em algum ponto $a \in A$, seja $F : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x, y) = f(x) - y$. **0,1**
Temos que F é também de classe C^k, $F(a, f(a)) = f(a) - f(a) = 0$ e $(\partial f / \partial x)\,(a, f(a)) = Df(a)$ é uma matriz invertível. **0,2**
Então, pelo Teorema da Aplicação Implícita, existem abertos $B \ni f(a)$, $V \ni a$, em $\mathbb{R}^n$, $V \subset A$, tal que a equação $F(x, y) = 0$ tem uma única solução $x = g(y) \in V$ para cada $y \in B$ e a aplicação $g : B \to V$ é de classe C^k. **0,1**
De $F(g(y), y) = 0$ para todo $y \in B$, temos que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$, logo $f(g(B)) = B$ é um aberto e f é injetiva em $g(B)$. Além disso, $(f|V)^{-1}\,(B) = g(B)$, pela unicidade de solução em V da equação $F(x, y) = 0$, para cada $y \in B$. Portanto, $g(B)$ é um aberto contendo a (pois imagem inversa de um aberto é um aberto e $g(f(a)) = a$), $f(g(B))$ é um aberto contendo $f(a)$ e $f : g(B) \to B$ tem inversa, $g : B \to g(B)$, de classe C^k. **0,1**

- -

4.

Pela Forma Local das Imersões, existe um difeormorfismo $G : W \to U \times Z$ de classe C^k, entre um aberto $W \ni f(a)$, em $\mathbb{R}^{m+n}$, e abertos $U \ni a$, em A, e Z, em $\mathbb{R}^n$, tal que $G \circ f(x) = (x, 0)$ para todo $x \in U$. **1,0**
Compondo com a projeção $\Pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$, obtemos $(\Pi G)f(x) = x$ para todo $x \in U$. ~~Em particular, tomando uma bola aberta B em $\mathbb{R}^{m+n}$ contida em W, temos $(\Pi G)f(x) = x$ para todo $x \in V := f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(A))$.~~
Logo ~~$f|V : V \to B \cap f(A)$~~ tem a inversa ΠG restrita a ~~$f(V) = B \cap f(A)$,~~ a qual é contínua, pois é restrição da aplicação ΠG de classe C^k. **1,0**.